Functietheorie 30-6-97

Tentamenopgave

I

1. Formuleer het maximumprincipe.

2. Toon aan dat het maximum van de functie $|\sin(z)|$ op het vierkant $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ gelijk is aan $\cosh(2\pi)$, en dat het maximum wordt bereikt in het punt $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi i$.

II

1. Formuleer de stelling van Cauchy en de formule van Cauchy.

2. Zij $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ en $|a| \neq r$. Bereken voor $n \in \mathbb{Z}$

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z-a)^n dz$$

waar Γ de positief (anti-klok) geörienteerde cirkel is met centrum 0 en straal r. Aanwijzing: onderscheidt de verschillende liggingen van a t.o.v. de cirkel.

III

1. Formuleer de residu-stelling.

2. Zij $a > 0$, $b > 0$. Zij

$$P_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}$$

Voor $y \in \mathbb{R}$ vast, beschouw de rationale uitdrukking

$$F(x) = F_{a,b,y}(x) = P_a(y-x) P_b(x).$$

i. Bepaal de polen van $F_{a,b,y}$ in het bovenhalfvlak.

ii. Bereken de residuen in deze polen.

iii. Bereken de integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} P_a(y-x) P_b(x) dx$.

IV

1. Formuleer het principe van analytische voortzetting.

2. We herinneren eraan dat

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

Toon aan dat $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.